1.9.1 Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Předpoklady: 010810

Lomený výraz = výraz ve tvaru zlomku, například $\dfrac{mnohočlen}{mnohočlen}$ $\Rightarrow$ protože i mnohočleny „jsou jenom čísla“ (i když nevíme jaká), pracujeme s lomenými výrazy stejně jako se zlomky

Podmínky

Dělit nejde všemi čísly $\Rightarrow$ u lomených výrazů musíme stanovit podmínky, aby jmenovatel nebyl roven nule (to už vlastně víme, když jsme se bavili o výrazech).
Na psaní podmínek nebudeme potřebovat žádné další pravidlo kromě jediného: nesmíme dělit nulou.

Př. 1: Urči podmínky, za kterých mají smysl lomené výrazy:

a) $\dfrac{1}{x-1}$ b) $\dfrac{2x-3}{x+2}$ c) $\dfrac{3}{3x-4}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+1}$ e) $\dfrac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-3}}$

a) $\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$.

b) $\dfrac{2x-3}{x+2} \Rightarrow x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$ (na čitateli nezáleží, může být roven nule).

c) $\dfrac{3}{3x-4} \Rightarrow 3x-4\neq 0 \Rightarrow 3x\neq 4 \Rightarrow x\neq \dfrac{4}{3}$.

d) $\dfrac{x-2}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1\neq 0$ platí vždy, protože $x^2\geq 0$ $\Rightarrow$ bez podmínky.

e) $\dfrac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-3}}$ - složený zlomek = podíl dvou zlomků $\Rightarrow$ rozdělíme si to a řešíme to postupně.

- $\dfrac{3x}{x+1} \Rightarrow x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$,
- $\dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$,
- $\dfrac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-3}} \Rightarrow$ číslo $\dfrac{3x}{x+1}$ dělíme číslem $\dfrac{2x+1}{x-3} \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-3}\neq 0 \Rightarrow 2x+1\neq 0 \Rightarrow 2x\neq -1$
  $\Rightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: Řešení předchozího příkladu a zejména bodu e) považuji za jeden z klíčových okamžiků při výuce matematiky. Právě psaní podmínek pro dělení je dobrou ukázkou toho, jak studenti nahrazují správná (ale přemýšlení vyžadující) pravidla jinými (která jsou sice špatně, ale žádné přemýšlení nevyžadují – například automatické $x \neq 0$). Vždy o tomto problému před řešením příkladu mluvím a vždy zdůrazňuji, že žádné další pravidlo kromě zákazu nuly při dělení není třeba.

Bod e) přesto vyřeší většina studentů špatně (nejčastěji zapomínají na $x \neq -\frac{1}{2}$). Při opravě si pak ukazujeme, že příčinou chyb bylo právě nedůsledné dodržování pravidla, ne jeho nedostatečnost. Naopak řešení různých bodů tohoto příkladu ukazuje, že jeho důsledné dodržování umožňuje vyřešit bezchybně i velmi rozdílné situace.
Někteří studenti mají problém i s bodem d), kde se jim opět „podaří“ rozložit mnohočlen x^2+1. Připomínám jim, aby si prohlédli rozkladný arzenál.

Př. 2: Najdi $D(18,24)$ a $n(18,24)$.

Co to znamená?
- $D(18,24)$ - největší (velké písmeno) společný dělitel
- $n(18,24)$ - nejmenší (malé písmeno) společný násobek

Obojí hledáme pomocí prvočíselných rozkladů:
- $18 = 3\cdot 6 = 2\cdot 3^2$
- $24 = 4\cdot 6 = 2^3\cdot 3$

$\Rightarrow$
- $D(18,24) = 2\cdot 3 = 6$ (společné v obou rozkladech).
- $n(18,24) = 2^3\cdot 3^2 = 8\cdot 9 = 72$ (vejdou se do něj oba rozklady).

Pedagogická poznámka: Jde o jedno z míst, kde se jim hodí čtvrtka s pamětí. Opět si připomínáme, jak si člověk může z logiky zápisu připomenout význam obou pojmů.

Společný dělitel mnohočlenů
Mnohočlen, kterým je každý z mnohočlenů dělitelný beze zbytku $\Rightarrow$ hledáme stejně jako společný dělitel přirozených čísel rozkladem.

Poznámka: Slovo největší nepoužíváme, protože u mnohočlenů nevíme, jaká je hodnota proměnné, tedy ani to, jaká je hodnota mnohočlenu.

Společný násobek mnohočlenů
Mnohočlen, který je dělitelný oběma mnohočleny beze zbytku $\Rightarrow$ hledáme stejně jako společný násobek přirozených čísel rozkladem.

Poznámka: Slovo nejmenší nepoužíváme, protože u mnohočlenů nevíme, jaká je hodnota proměnné, tedy ani to, jaká je hodnota mnohočlenu.

Př. 3: Najdi společný dělitel mnohočlenů $6x\cdot(x^2-y^2)$ a $9y\cdot(x+y)^2$.

$6x\cdot(x^2-y^2) = 2\cdot 3x\cdot(x-y)\cdot(x+y)$

$9y\cdot(x+y)^2=3\cdot 3y\cdot(x+y)^2$

Společní dělitelé jsou 3; $(x+y)$ a všechny jejich možné součiny - například $3\cdot(x+y)$, který bychom mohli nazývat například nejkomplexnější nebo nejsložitější (něco jako obdoba největšího společného dělitele).

Př. 4: Najdi společný násobek mnohočlenů $6x\cdot(x^2-y^2)$ a $9y\cdot(x+y)^2$.

$6x\cdot(x^2-y^2)=2\cdot 3x\cdot(x-y)\cdot(x+y)$

$9y\cdot(x+y)^2=3\cdot 3y\cdot(x+y)^2$

Do společného násobku započítáme nejvyšší mocniny čísel a mnohočlenů v obou rozkladech:

$2\cdot 3^2\cdot x\cdot y\cdot(x-y)(x+y)^2$ - tento násobek bychom mohli nazývat nejjednodušší.

Pedagogická poznámka: U předchozího je důležité, aby si studenti uvědomovali, že stále dělají s výrazy to samé, co dělali s čísly.

Př. 5: Najdi nejsložitější společný dělitel a nejjednodušší společný násobek mnohočlenů $14a^2x^2y\left(x^2-y^2\right)\cdot(a-b)$ a $21ay(x-y)\cdot\left(a^2-2ab+b^2\right)$.

$14a^2x^2y\left(x^2-y^2\right)\cdot(a-b)=2\cdot 7\cdot a^2x^2y(x-y)(x+y)(a-b)$

$21ay(x-y)\cdot\left(a^2-2ab+b^2\right)=3\cdot 7\cdot a\cdot y(x-y)\cdot(a-b)^2$

Nejsložitější společný dělitel (součin společných mocnin): $7\cdot ay(x-y)(a-b)$.

Nejjednodušší společný násobek (obsahuje oba rozklady):

$2\cdot 3\cdot 7\cdot a^2x^2y(x-y)(x+y)(a-b)^2$.

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž

$$\frac{V_1\cdot V_3}{V_2\cdot V_3}=\frac{V_1}{V_2}$$

jsou V_2 a V_3 různé od nuly, platí : $\xrightarrow{\textit{krácení}}$ $\xleftarrow{\textit{rozšiřování}}$

Mezi V_3 a zbytkem čitatele i jmenovatele je krát - ze sčítání a odčítání krátit nelze

- Tady krátit lze $\frac{(x+1)x^2}{(6x-5)(x+1)}=\frac{x^2}{(6x-5)}$. Hodnotu $\frac{x^2}{(6x-5)}$ nejdříve násobíme $\cdot(x+1)$ a pak dělíme stejným číslem: $(x+1)$ $\Rightarrow$ po zkrácení zůstane jeho hodnota stejná a ušetříme si dvě operace.
- Tady krátit nelze $\frac{(x+1)x^2-1}{(6x-5)(x+1)}\neq\frac{x^2-1}{6x-5}$. Hodnotu x^2 nejdříve násobíme $\cdot(x+1)$ a pak dělíme stejným číslem, hodnotu -1 (zbytek čitatele) číslem $(x+1)$ pouze dělíme $\Rightarrow$ hodnota celého zlomku by se „zkrácením“ změnila.

Př. 6: Změň čitatel lomeného výrazu $\frac{(x+1)x^2-1}{(6x-5)(x+1)}$ pomocí závorek tak, aby bylo možné jej upravit krácením.

Aby bylo možné zlomek krátit, musí být jeho čitatel i jmenovatel napsán ve tvaru součinu $\Rightarrow$ musíme upravit čitatel: $\frac{(x+1)(x^2-1)}{(6x-5)(x+1)}=\frac{x^2-1}{6x-5}$

Př. 7: Zkrať lomené výrazy:

a) $\frac{15b^2xy^2}{20b^2x^2y}$ b) $\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^3(x+1)}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

d) $\frac{6r^2\cdot(p^2-4)\cdot(x+y)^2}{9r^2\cdot(p+2)\cdot(x^2-y^2)}$ e) $\frac{y^2-y-6}{y^2-4y+3}$ f) $\frac{9p^2+1}{9p^2-1}$

a) $\frac{15b^2xy^2}{20b^2x^2y}=\frac{3\cdot5\cdot b^2xy^2}{4\cdot5\cdot b^2x^2y}=\frac{3y}{4x}$

b) $\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^3(x+1)}=\frac{x+1}{(x-1)^2}$

c) $\frac{x^2-y^2}{x-2xy+y^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}$

d) $\frac{6r^2\cdot(p^2-4)\cdot(x+y)^2}{9r^2\cdot(p+2)\cdot(x^2-y^2)}=\frac{2\cdot3(p+2)(p-2)(x+y)^2}{3^2(p+2)\cdot(x-y)(x+y)}=\frac{2(p-2)(x+y)}{3(x-y)}$

e) $\frac{y^2-y-6}{y^2-4y+3}=\frac{(y-3)(y+2)}{(y-3)(y-1)}=\frac{y+2}{y-1}$

f) $\frac{9p^2+1}{9p^2-1}=\frac{3^2p^2+1}{(3p-1)\cdot(3p+1)}$ - čitatel není možné rozložit $\Rightarrow$ zlomek nelze zjednodušit krácením.

Př. 8: Sbírka příklad 1.

Shrnutí: S lomenými výrazy pracujeme podobně jako s obyčejnými zlomky. Krátit můžeme pouze výraz, kterým je vynásoben zbytek čitatele i zbytek jmenovatele.